# TEME RECAPITULATIVE
# PENTRU SUBIECTUL al II-lea BACALAUREAT

## MATRICE

**Definiție:** Fie M = {1; 2; … ;m}; **N** = {1; 2; …, n}. O aplicaţie A : M x N $\rightarrow$ **C**, A(i,j) = $a_{ij}$ ;

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ ...\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ ...a_{2n} \\ ...\ ...\ ...\ ... \\ a_{m1}\ a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}$$ se numeşte **matrice**,

**Notaţie :** A $\in$ **M** $_{m,\,n}$(**C**), $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ ;

### Cazuri particulare
### Matricea pătratică

**Matricea pătratică** este matricea în care numărul de linii este egal cu numărul de coloane m = n:

A $\in$ **M** $_{n,n}$(**C**) = **M** $_n$(**C**); $$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ ...\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ ...a_{2n} \\ ...\ ...\ ...\ ... \\ a_{n1}\ a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix}$$

Elementele : $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ – formează **diagonala principală**, iar elementele : $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \dots, a_{n1}$ – formează **diagonala secundară**.

### Matricea nulă

**Matricea nulă** este matricea în care toate elementele sunt 0; **O**$_2 \in$ **M** $_2$(**C**): **O**$_2$ = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

**O**$_3 \in$ **M** $_3$(**C**): **O**$_3$ = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

**Observaţie:** Matricea nulă poate fi şi dreptunghiulară.

### Matricea unitate

**Matricea unitate** este matricea în care elementele de pe diagonala principală sunt 1, iar celelalte elemente sunt 0;

Exemplu: **I**$_2 \in$ **M** $_2$(**C**):

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \ \mathbf{I}_3 \in \mathbf{M}_3(\mathbf{C}): \ \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

## OPERAŢII CU MATRICE

### Adunarea matricelor

Fie matricele $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, $B \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, $A + B = C$, $\Rightarrow C \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ (se adună poziţiile omoloage din cele două matrice).

### Proprietăţi

1) **asociativă**: $(A + B) + C = A + (B + C)$, $\forall$ $A, B, C \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C})$;
2) **comutativă**: $A + B = B + A$, $\forall$ $A, B \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C})$;
3) **elementul neutru**: $\exists\, O_{m,n} \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ astfel încât: $A + O_{m,n} = O_{m,n} + A = A$, $\forall A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C})$;
4) **elementul opus**: $\exists$ matricea $-A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, astfel încât: $A + (-A) = (-A) + A = O_{m,n}$, $\forall A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C})$.

### Înmulţirea

Fie matricele : $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C})$; $B \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbf{C})$, $\Rightarrow C \in \mathbf{M}_{m,p}(\mathbf{C})$, şi $A*B = C$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,p}$ (se înmulţesc elementele de pe linia din prima matrice, fiecare cu omologul lui de pe coloana din a doua matrice, iar produsele obţinute se adună şi rezultatul se scrie pe poziţia corespunzătoare liniei şi coloanei utilizate).

### Proprietăţi

1**) asociativă**: $(A * B) * C = A * (B * C)$, $\forall A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, $\forall B \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbf{C})$, $\forall C \in \mathbf{M}_{p,q}(\mathbf{C})$;
4) **elementul simetric – matricea inversă**: $\exists$ matricea: $A^{-1} \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ astfel încât:

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = I_n. \ \forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$$

5) **distributivitatea**:

i) $A * (B + C) = A * B + A * C$, $\forall A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, $\forall B, C \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbf{C})$,
ii) $(A + B) * C = A * C + B * C$, $\forall A, B \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, $\forall$ $C \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbf{C})$ .

### Înmulţirea matricelor cu scalari

Fie $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, $a \in C$, $\Rightarrow B \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, unde $B = aA$, $b_{ij} = a\, a_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ .

### Proprietăţi

1) $a(A + B) = a A + a B$, $\forall A, B \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, $\forall$ $a \in \mathbf{C}$ ,
2) $(a + b) A = aA + bA$, $\forall A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, $\forall a, b \in \mathbf{C}$.
3) $a(AB) = (a A) B = A (a B)$, $\forall A, B \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, $\forall$ $a \in \mathbf{C}$.
4) $(ab) A = a (bA) = b (aA)$ , $\forall A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, $\forall$ $a, b \in \mathbf{C}$;

## Transpusa unei matrice

Transpusa unei matrice este acea matrice în care liniile matricei iniţiale devin coloane şi invers:
fie matricea $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C})$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{m1}\ a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \text{ atunci: } {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{21} \dots a_{m1} \\ a_{12}\ a_{22} \dots a_{m2} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{1n}\ a_{2n} \dots a_{mn} \end{pmatrix},\ {}^tA \in \mathbf{M}_{n,m}(\mathbf{C});$$

### Proprietăţi

1) ${}^t(aA) = a \cdot {}^tA,\ \forall A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C}),\ \forall\ a \in C;$
2) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB,\ \forall A, B \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C}),$
3) ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA,\ \forall A, B \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C}),$

## Urma unei matrice

Fie matricea pătratică $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$. **Urma matricei** A este suma elementelor de pe diagonala principală:
Urma unei matrici se notează

$$\mathrm{Tr}\ A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

**Observaţie :** Tr ( sau tr ) este prescurtarea de la trace din engleză.

# DETERMINANŢI

**Observaţie : Determinantul unei matrice poate fi calculat numai pentru matricele pătratice.**

### Determinantul de ordinul doi

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \\ a_{21}\ a_{22} \end{pmatrix}$, $A \in \mathbf{M}_2(\mathbf{C})$, $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \\ a_{21}\ a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$.

### Determinantul de ordinul trei

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \\ a_{31}\ a_{23}\ a_{33} \end{pmatrix}$, $A \in \mathbf{M}_3(\mathbf{C})$,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{23} a_{32} a_{11} - a_{21} a_{21} a_{33}.$$

## REGULA LUI SARRUS

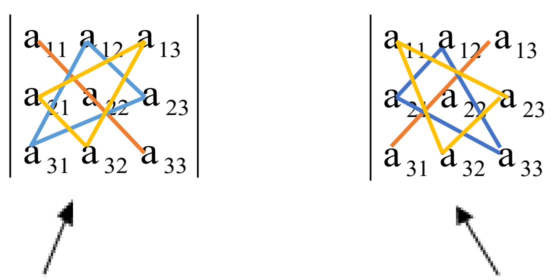
Calculul determinantului cu **Regula lui Sarrus** se face astfel:
se copiază primele două linii apoi se calculează cele trei produse posibile „după” diagonala principală, care se adună – cu semnele lor – şi analog se calculează cele trei produse „după” diagonala secundară, care se scad (atenţie la regula semnelor):

$$\det(A) = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

## REGULA TRIUNGHIULUI

Calculul determinantului cu **Regula triunghiului** se face astfel:
determinantul de ordin trei are în dezvoltarea sa şase termeni, trei cu semnul plus şi alţi trei cu semnul minus. Primul termen cu plus se găseşte înmulţind elementele de pe diagonala principală, iar ceilalţi doi, înmulţind elementele situate în vârfurile celor două triunghiuri care au o latură paralelă cu diagonala principală. După aceeaşi regulă, referitoare la diagonala secundară, se obţin termenii cu minus.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{se calculeaza astfel:}$$



$$\det(A) = \overbrace{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}} \overbrace{- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}}.$$

**Observaţie :** Atât <u>regula lui Sarrus</u> cât şi <u>regula triunghiului</u> se aplică numai determinanţilor de ordin 3.

## Determinant Vandermonde

**Definiție:** Determinantul de forma : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^n & a_1^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$ $= (a_0 - a_1)\cdot(a_0 - a_2)\cdot\ldots\cdot(a_{n-1} - a_n)$ – se numeşte **determinant Vandermonde**;

## Minorul unui determinant

**Definiție:** Determinantul care se obţine din cel iniţial prin suprimarea (eliminarea / ştergerea) liniei **i** şi a coloanei **j** se numeşte **minorul** $d_{ij}$ al determinantului iniţial.

## Complementul algebric al unui determinant

**Complementul algebric** al unui determinant este minorul luat cu semn: $\delta_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ij}$.

## Dezvoltarea unui determinant după o linie (coloană) cu ajutorul complemenţilor algebrici

Exemplu: Dezvoltarea determinantului de ordinul trei după linia a doua:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

## Proprietăţile determinanţilor

1) Determinantul unei matrice este egal cu determinantul matricei transpuse;
**Observaţie:** Proprietăţile următoare enunţate pentru linii sunt valabile şi pentru coloane;
2) Determinantul unei matrice care are toate elementele unei linii 0 este nul;
3) Dacă înmulţim toate elementele unei linii dintr – o matrice cu un număr, determinantul matricei se înmulţeşte cu acel număr;
**Observaţie:** Proprietatea nr. 3 se utilizează la darea de factor comun între elementele unei linii pentru uşurarea calculelor;
4) Dacă într-o matrice la elementele unei linii se adună elementele corespunzătoare unei alte linii înmulţite cu un număr, valoarea determinantului nu se schimbă;
**Observaţie :**Această proprietate (nr. 4) este eficientă pentru matrice de ordin mai mare decât 3 (se formează cât mai multe „elemente” de 0) pentru a aplica dezvoltarea după o linie (coloană) cu ajutorul complemenţilor algebrici .
5) Dacă o matrice are elementele a două linii proporţionale (egale) atunci valoarea determinantului este 0;
6) Dacă schimbăm între ele elementele a două linii, atunci valoarea determinantului îşi schimbă semnul.
7) Determinantul produsului a două matrice este egal cu produsul determinanţilor celor două matrice:
$\det(AB) = \det(A)\det(B) \Rightarrow \det(A_1A_2 \dots A_n) = \det(A_1)\det(A_2)\dots\det(A_n)$ şi $\det(A^n) = [\det(A)]^n$.
8) Dacă elementele unei linii sunt o combinaţie liniară a elementelor altor linii atunci determinantul este 0.

### Inversa unei matrice

**<u>Definiţie</u>:** O **matrice pătratică** A se numeşte **nesingulară** respectiv **singulară** dacă determinantul matricei A este nenul (det A≠0) respectiv nul (det A=0).

.

### <u>Mod de lucru</u>

Fie matricea pătratică A $\in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$, pentru determinarea matricei inverse se parcurg următorii paşi:

1) se calculează: det A, dacă det A $\neq 0$ se trece la paşii următori;
2) se obţine matricea transpusă: ${}^tA$;
3) se calculează: complemenţii algebrici din ${}^tA$ notaţi cu $A_{ij}$;
4) se determină **matricea adjunctă**: $A^* = (A_{ij})$;
5) Atunci $\exists$ **matricea inversă**: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^*$ astfel încât: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

## APLICAȚII ALE DETERMINANȚILOR ÎN GEOMETRIE

Ecuația dreptei determinată de punctele $A(x_1,y_1)$ și $B(x_2,y_2)$ scrisă sub formă de determinant este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Punctele $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ și $C(x_3,y_3)$ sunt coliniare dacă:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Aria suprafeței triunghiulare ABC este:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|, \text{ unde } \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

## SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

### Forma generală

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}; \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$ – matricea sistemului ;

## SISTEM CRAMER

Sistemul (S) este **compatibil determinat** sau **sistem Cramer** dacă: m = n . Notăm: det A= $\Delta$;
în coloana k, a matricei A, înlocuim coeficienţii necunoscutei k cu termenii liberi şi obţinem determinantul $\Delta_k$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots b_1 \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots b_2 \ldots a_{2n} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1} \ldots \underbrace{b_n}_{coloana\ k} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$ atunci soluţia sistemului (S) este : $x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$, $k = \overline{1,n}$.

## ECUAŢII MATRICEALE

1) Ecuaţia : A·X = B, dacă $\exists$ matricea: $A^{-1}$ $\Rightarrow$ are soluţia de forma : $X = A^{-1} \cdot B$ ;
2) Ecuaţia : X·A = B, dacă $\exists$ matricea: $A^{-1}$ $\Rightarrow$ are soluţia de forma : $X = B \cdot A^{-1}$ ;
3) Ecuaţia : A·X·B = C, dacă $\exists$ matricele: $A^{-1}$, $B^{-1}$ $\Rightarrow$ are soluţia de forma : $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$ ;

**Observaţie:** Dacă există un sisteme de ecuații liniare cu n necunoscute

$$(S)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$ acesta se poate scrie sub formă matriceală A·X = B, unde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

# LEGI DE COMPOZIŢIE

Fie legea de compoziţie „* ” , * : M x M $\rightarrow$ M, care la perechea ordonată (x,y) din produsul cartezian M x M îi asociază elementul x*y din M. Notaţie (x,y) $\rightarrow$ x*y

### Tabla unei legi de compoziţie ( Tabla lui Cayley )

Fie M = { $a_1, a_2, \ldots, a_n$} o mulțime finită cu n elemente. Acțiunea unei legi de compoziție „* ” pe M poate fi descrisă prin tabla Cayley a operației „* ”.

$$\begin{array}{c|c} * & a_1\ a_2 \ldots a_j \ldots a_n \\ \hline a_1 & \qquad\quad \vdots \\ a_2 & \qquad\quad \vdots \\ \vdots & \qquad\quad \vdots \\ a_i & \ldots\ldots\ a_i * a_j \\ \vdots & \\ a_n & \end{array}$$

## Parte stabilă

**<u>Definiţie</u>:** O submulţime nevidă $H \subset M$ este o **parte stabilă** în raport cu legea de compoziţie „* ” dacă: $\forall$ x, y$\in$H, $\Rightarrow$ x*y $\in$H.

## Proprietăţi

Fie legea de compoziţie „* ” , $* : M \times M \to M$,
1) **asociativă**: (x*y)*z = x*(y*z) , $\forall$ x, y, z $\in$M ;
2) **comutativă** : x*y = y*x, $\forall$ x, y $\in$M;
3) admite **elemnt neutru** dacă: $\exists\, e \in M$ astfel încât: x*e = e*x = x , $\forall\, x \in M$ ;

**Observaţie** : Elementul neutru, dacă există, este **unic**.

4) o lege asociativă şi cu element neutru are **elemente simetrizabile** dacă există x’$\in$M astfel încât : x*x’ = x’*x = e, $\forall\, x \in M$ ;
**Observaţie:** Dacă x, y$\in$M sunt simetrizabile în raport cu legea de compoziţie „* ” (asociativă şi cu element neutru), atunci x*y şi x’ sunt simetrizabile – şi au loc relaţiile:
a) (x*y)’ = y’*x’;
b) (x’)’ = x;
c) elementul simetric–dacă există este **unic** pentru fiecare element în parte.

## CLASE DE RESTURI MODULO n

Fie $n \in N$, $n \geq 2$, $Z_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{n-1}\}$

### Operaţii în $Z_n$.
### Adunarea

”+”:$Z_n \times Z_n \to Z_n$ , $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \widehat{\alpha \oplus \beta}$ ; $\forall\, \hat{\alpha}, \hat{\beta} \in Z_n$, unde $\oplus$: $Z \times Z \to Z$ , $\alpha \oplus \beta = (\alpha + \beta)$ mod n, numită adunarea modulo n.

### Înmulţirea

”·”:$Z_n \times Z_n \to Z_n$ , $\hat{\alpha} \cdot \hat{\beta} = \widehat{\alpha \odot \beta}$ ; $\forall\, \hat{\alpha}, \hat{\beta} \in Z_n$, unde $\odot$: $Z \times Z \to Z$ , $\alpha \odot \beta = (\alpha \cdot \beta)$ mod n, numită înmulțirea modulo n.

## Proprietăţi

1)„$\oplus$” este asociativă, comutativă, admite pe $\hat{0}$ ca element neutru şi pe **n – a** (**atenţie** : n – a are „căciulă” care n-a putut fi concretizată ) element opus.
2) „$\otimes$” este asociativă, comutativă, admite pe $\hat{1}$ ca element neutru şi atunci când n este număr prim admite element simetric.
3) are loc distributivitatea înmulţirii faţă de adunare: $\hat{a} \otimes (\hat{b} \oplus \hat{c}) = \hat{a} \otimes \hat{b} \oplus \hat{a} \otimes \hat{c}$ , $\forall\, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in Z_n$.

### Monoid

Fie mulţimea $M \neq \emptyset$ şi legea de compoziţie „* ”, $* : M \times M \to M$, $(x,y) \to x*y$ , mulţimea M împreună cu legea de compoziţie „*” formează o structurtă de **monoid** dacă verifică proprietăţile:
1) **asociativă**: $(x*y)*z = x*(y*z)$ , $\forall x, y, z \in M$;
2) **elementul neutru:** $\exists e \in M$ astfel încât: $x*e = e*x = x$ , $\forall x \in M$;
**Notaţia** pentru **monoid** este : $(M,*)$.

**Observaţie**: Dacă legea de compoziţie „*” este comutativă: $x*y = y*x$, $\forall x, y \in M$, atunci monoidul $(M,*)$ este monoid comutativ.

## GRUP

Fie mulţimea $G \neq \emptyset$ şi legea de compoziţie „*”, $* : G \times G \to G$, $(x,y) \to x*y$, mulţimea G împreună cu legea de compoziţie „*” formează o structurtă de **grup** dacă verifică proprietăţile:
1) **asociativă**: $(x*y)*z = x*(y*z)$ , $\forall x, y, z \in G$;
2) **elementul neutru:** $\exists e \in G$ astfel încât: $x*e = e*x = x$ , $\forall x \in G$;
3) **toate elementele** sunt **simetrizabile**: $\forall x \in G$, $\exists x' \in G$ astfel încât: $x * x' = x' * x = e$.

**Notaţia** pentru **grup** este : $(G,*)$.
**Observaţie:** Dacă * este comutativă: $x*y = y*x$, $\forall x, y \in G$, atunci grupul $(G,*)$ este **grup abelian sau grup comutativ**.

### Reguli de calcul într-un grup

**Teoremă (Regulile de simplificare)**: Fie $(G,*)$ un grup.
$\forall x, a, b \in G$, $x*a = x*b \Rightarrow a = b$ (simplificarea la stânga)
$\forall x, a, b \in G$, $a*x = b*x \Rightarrow a = b$ (simplificarea la dreapta)
**Teoremă:** Fie $(G,*)$ grup, $a, b \in G$ și a’ simetricul lui a. Ecuația $a*x = b$ are în G soluție unică $x = a'*b$ și euația $y*a = b$ are în G soluție unică $y = b*a'$.

### Subgrup

Fie mulţimea G înzestrată cu legea de compoziţie „*” şi $(G,*)$ – grup , dacă $\emptyset \neq H \subset G$ atunci $(H,*)$ – **subgrup** dacă verifică proprietăţile:
1) $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$;
2) $\forall x \in H \Rightarrow x' \in H$;

### Morfisme de grupuri

Fie $(G,*)$ – cu elementul neutru e; şi $(G',o)$ – cu elementul neutru e’ – două grupuri; O aplicaţie $f : G \to G'$ – se numeşte **morfism de grupuri** dacă: $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$, $\forall x, y \in G$;

### Proprietăţi

1) $f(e) = e'$;
2) $f(x') = (f(x))'$;

### Izomorfisme de grupuri

O aplicaţie $f : G \to G'$ – se numeşte **izomorfism de grupuri** dacă:
1) f este bijectivă;
2) f este morfism de grupuri.

**Observaţie: Notaţie** pentru grupurile G şi G' izomorfe $G \simeq G'$

### Endomorfisme de grupuri

Fie $(G,*)$ – grup. Oricare morfism $f : G \to G$ se numeşte **endomorfism** al grupului G.

### Automorfisme de grupuri

Fie $(G,*)$ – grup; Oricare izomorfism $f : G \to G$ se numeşte **automorfism** al grupului G.

## INELE

Fie mulţimea $A \neq \varnothing$ înzestrată cu legile de compoziţie „*" şi „o" :
1) $* : A \times A \to A, (x,y) \to x*y$ ;
2) $o : A \times A \to A, (x,y) \to xoy$ ;
mulţimea A împreună cu legile de compoziţie „*" şi „o" este **inel** dacă verifică proprietăţile:

1) (A, * ) – **grup abelian** cu elemetul neutru e;
2) (A, o ) – **monoid**;
3) „o" este distributivă faţă de „* ":
   i) $x \text{ o } (y*z) = (xoy) * (xoz)$; $\forall x, y, z \in A$;
   ii) $(x*y) \text{ o } z = (xoz) * (yoz)$; $\forall x, y, z \in A$;

**Notaţia** pentru **inel** este : (A,*,o ).

**Observaţie:** Dacă legea de compoziţie „o" este comutativă: $x \text{ o } y = y \text{ o } x$, $\forall x, y \in A$, atunci inelul (A,*,o ) – **este inel comutativ**.

## CORPURI

Fie mulţimea $K \neq \varnothing$ înzestrată cu legile de compoziţie „*" şi „o" :
1) $* : K \times K \to K, (x,y) \to x*y$ ;
2) $o : K \times K \to K, (x,y) \to xoy$ ; mulţimea K împreună cu legile de compoziţie „*" şi „o" este **corp** dacă verifică proprietăţile:
1) (K, * ) – grup abelian cu elemetul neutru e;
2) $(K \setminus \{e\}, o)$ – grup;
3) „o" este distributivă faţă de „* ": i) $x \text{ o } (y*z) = (xoy) * (xoz)$; $\forall x, y, z \in K$,
ii) $(x*y) \text{ o } z = (xoz) * (yoz)$; $\forall x, y, z \in K$.

**Notaţia** pentru **corp** este : (K,*,o ).

# TESTE PROPUSE
# SUBIECTUL II BACALAUREAT

## TESTUL 1

1) Se cosideră matricele A=$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2$=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $A^2 - 3A + 2I_2 = 2\cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) Să se arate că matricea A este inversabilă și să se calculeze inversa sa.

c) Dați exemplu de două matrice X și Y$\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \{O_2\}$ pentru care $X\cdot Y= O_2$ .

2) Pe mulțimea A= (0,∞) definim legea ”∘” prin operația x∘y = $\sqrt{xy}$.

b) Demonstați că 1∘ (4∘9)< (1∘4) ∘9.

a) Demonstați că 4∘9$\in \mathbb{N}$.

c) Demonstrați că legea ”∘” nu este asociativă.

## TESTUL 2

1) Se consideră sistemul $\begin{cases} x - my + z = 1 \\ x + my - z = m^2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$, unde m$\in \mathbb{R}$. Notăm cu A matricea coeficienților sistemului.

a) Determinați m cu proprietatea că det(A) = 0.

b) Rezolvați sistemul pentru m = 0.

c) Pentru m = −1, determinați soluția ($x_0$, $y_0$,,$z_0$) a sistemului, care verifică relația $2x_0 + y_0 - z_0 = 2$.

2) Pe $\mathbb{Z}$ se definește operația algebrică x∘y = x + y − m, ∀ x, y$\in \mathbb{Z}$

a) Să se rezolve ecuația ( $x^2$ +2x) ∘(x+m) = −2.

b) Să se determinne m$\in \mathbb{Z}$, pentru care e = 2021 este element neutru în raport cu operația dată.

c) Să se arate că legea ”∘” este asociativă.

## TESTUL 3

1) Se dă M=$\left\{A(x) = \left(\begin{pmatrix} x+2 & 1 \\ 2x & x-2 \end{pmatrix}\right) / x \in \mathbb{R} \right\}$

a) Să se arate că $I_2 \notin M$ .

b) Să se arate că $A(x)$ este inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$ .

c) Să se rezolve ecuația $A(0) \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2) Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 2 \cdot (x + y - 3)$.

a) Calculați $3 * 4$.

b) Arătați că $x * y = (x-2) \cdot (y-2) + 2$.

c) Calculați $1 * 2 * 3 * \ldots * 2021$.

## TESTUL 4

1) Se cosideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculați det(B).

b) Arătați că AB = BA.

c) Determinați numerele reale x pentru care $\det(B + xA) = 2$.

2) Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3(x+y-2) - xy$.

a) Calculați $2 * 4$.

b) Arătați că $x * y = 3 - (x-3) \cdot (y-3)$ pentru orice numere reale x și y.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x = x$.

## TESTUL 5

1) Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ și mulțimea $M = \{X(a) \mid X(a) = a\,A + I_2, a \in \mathbb{R}\}$

a) Să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(a+b)$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ .

b) Să se arate că există $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $X(a) \cdot X(e) = X(a)$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$ .

c) Să se calculeze produsul $X(2) \cdot X(3) \cdot \ldots \cdot X(2021)$.

2) Pe mulțimea $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție $x \circ y = xy + x + y$.

a) Să se arate că legea este asociativă.

b) Fie funcția $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. Să se verifice egalitatea $f(x \circ y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ .

c) Să se calculeze M = $1 \circ \frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \ldots \circ \frac{1}{2021}$.

**TESTUL 6**

1) Se consideră punctele A(2,3), B(3,2), $C_n$(2n+1,2n+1), n∈ ℕ.

a) Să se arate că punctele A, B, $C_n$ sunt necoliniare pentru orice n∈ ℕ.

b) Pentru n=2 să se calculeze aria triunghiului ABC.

c) Să se determine n∈ ℕ, pentru care distanța de la punctul $C_n$ la dreapta AB este egală cu $8\sqrt{2}$.

2) Pe mulțimea ℝ se consideră legea de compoziție x∘y = xy −x−y + m, m∈ ℝ.

a) Pentru m=2 să se determine elementul neutru al legii de compoziție.

b) Pentru care m∈ ℝ legea este asociativă?

c) Dacă m=2 să se calculeze M = $(-2021) \circ (-2020) \circ \ldots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ \ldots \circ 2021$.

**TESTUL 7**

1) Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x - 5y + 4z = 5 \\ -4x + y + z = 1 \\ x - y + z = a \end{cases}$, unde a∈ ℝ.

a) Să se calculeze determinantul matricei sistemului.

b) Să se determine a∈ ℝ pentru care (1;2;3) este soluție a sistemului.

c) Pentru a = 0, să se rezolve sistemul.

2) Se consideră legea de de compoziție x∘y = xy + 2x + 2y + 2.

a) Să se arate că e = −1 este elementul neutru al legii de compoziție"∘".

b) Să se determine $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, pentru care x+$x'$ = - 2, $x'$ este simetricul lui x.

c) Să se rezolve ecuția x∘x = 6.

**TESTUL 8**

1) Se cosideră matricele A(a)= $\begin{pmatrix} a+2 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, unde a∈ ℝ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că det(A(0)) = −2.

b) Determinați matricea B∗ $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ știind că a·B = A(a) − 2·$I_3$, pentru orice număr real a.

c) Determinați numărul real n pentru care det(A(n)·A(−n)) ≤ 0.

2) Pe mulțimea M= $[0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{4(x+y)}{xy+4}$.

a) Calculați $\sqrt{4}*3$.

b) Arătați că $x*0=x$, pentru orice $x\in M$.

c) Arătați că $x*x \leq 2$, pentru orice $x\in M$.